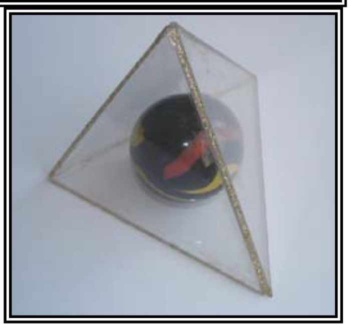
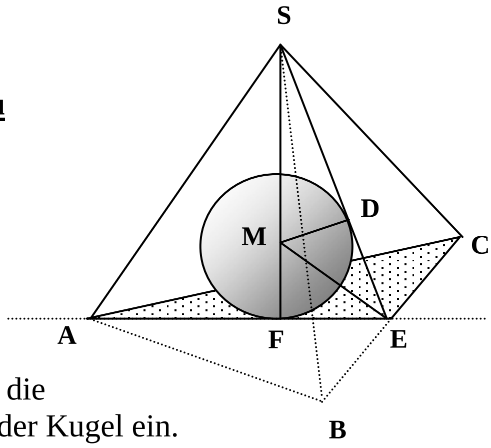
Kugel – Tetraeder – Würfel

Ein reguläres Tetraeder ist eine Pyramide, welche aus vier gleichseitigen Dreiecken besteht.
In das Innere lässt sich eine Kugel setzen.
Das Tetraeder wiederum passt exakt in einem Würfel.

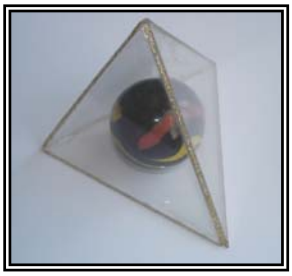


Ausgehend von einem Tetraeder mit einer **Kantenlänge von 19,5 cm** berechnen wir den Radius der Kugel innen, um den Zusammenhang zwischen Kantenlänge s und Radius r zu erhalten.

Dieser Umrechnungsfaktor muss dann auch für unterschiedlich große Tetraeder gelten.
Somit können wir umgekehrt für eine beliebige Kugel das passende Tetraeder herstellen.

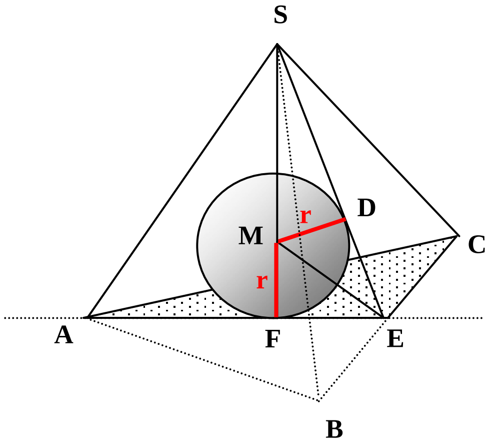


1.0. Wir arbeiten mit einem Schnittmodell, um die Zusammenhänge besser zu erkennen.
1.1. **Wir schneiden die Pyramide symmetrisch genau durch die Kugelmitte auseinander.**
Berechne die Längen der Strecken [AE] und [ES].
1.2. Fertige ein Schrägbild des Tetraeders an mit der Symmetrieachse AE des gleichseitigen Dreiecks ABC als Schrägbildachse.
Wir wählen $\omega = 45°$, $q = \frac{2}{3}$ und den Maßstab 1:2.
1.3. Die Kugel berührt die Fläche ABC im Punkt F und die Fläche BCS im Punkt D. Zeichne den Schnittkreis der Kugel ein.
1.4. Berechne für die Kantenlänge s = 19,5 cm den Radius r der Kugel.
1.5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Kantenlänge s und Kugelradius r für alle Tetraeder?
1.6. Erstelle aus Acrylglas (Polycarbonat mit 1mm Dicke) zu deiner Kugel die Pyramide.
1.7. Das Tetraeder passt exakt in einen Würfel.
Berechne zu deiner Pyramide die Seitenlänge des Würfels.

 &  ⇨ 

1.8. Fertige den Würfel aus Acrylglas (Polycarbonat mit 1mm Dicke) an.

Lösungen zu 1.4 und 1.5



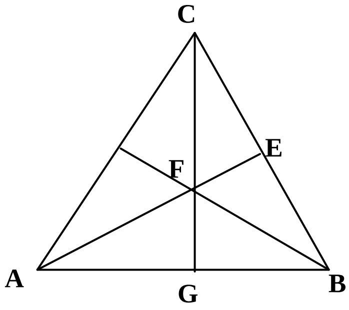
(1) $\overline{AE} = \overline{ES} = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{19{,}5}{2}\sqrt{3} = 16{,}89$ cm

Formelsammlung: Höhe im gleichseitigen Dreieck!)

(2) Ähnlichkeit: Δ MDS ~ Δ FES also: $\frac{\overline{FE}}{r} = \frac{\overline{ES}}{\overline{FS} - r}$

(3) Berechnung von $\overline{FE}$:

Dazu betrachten wir das gleichseitige Dreieck ABC von oben. Wieder Ähnlichkeit:



Δ FEC ~ Δ GBC

$\frac{\overline{FE}}{9{,}75} = \frac{9{,}75}{16{,}89} \quad \rightarrow \quad$ FE = 5,63 cm

(4) $\overline{FS}$ mit SvP:

$\overline{FS}^2 + 5{,}63^2 = 16{,}89^2 \quad \rightarrow \quad \overline{FS} = 15{,}92$

(5) Wir setzen ein in (2)

$\frac{5{,}63}{r} = \frac{16{,}89}{15{,}92 - r} \quad \rightarrow \quad r = 3{,}98$ cm

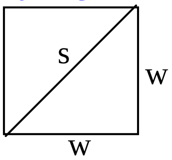
Ergebnis: Hat die Pyramide eine Seitenlänge s von 19,5 cm, so besitzt die genau in sie passende Kugel einen Radius r von 3,98 cm.

(6) Umgekehrt ist der Umrechnungsfaktor zwischen s und r für alle beliebigen Pyramiden und entsprechenden Kugeln innen immer derselbe:

$\frac{s}{r} = \frac{19{,}5}{3{,}98} = 4{,}9$ oder $\boxed{s = r \cdot 4{,}9}$ Dies ist der Umrechnungsfaktor

Multipliziert man den Radius r der Kugel mit 4,9, so erhält man die Seitenlänge s der Pyramide.

Lösung zu 1.7.
Der Zusammenhang zwischen Pyramidenseite s und Würfelseite w ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras:



$w^2 + w^2 = s^2$ ...

$w = s\sqrt{0{,}5} = 0{,}7\ s$

Multipliziert man die Pyramidenseite s mit 0,7 , so erhält man die Würfelseite w.

<u>Bemerkungen zur Herstellung der Modelle:</u>

(1) Bei Aufgabe 1.1. habe ich mit einem vorgefertigten Schnittmodell gearbeitet:
- – Styroporkugel von 8 cm Durchmesser (aus Bastelgeschäft)
- – dazu die passende Pyramide aus Folie (Kopierfolie für Tageslichtprojektor) mit einer Seitenlänge von 19,5 cm.
- – Kugel und Pyramide halbiert und geeignet fixiert. Dies ist dann als Demo – Objekt recht brauchbar.

(2) Als Ausgangskugel zu 1.6. eignet sich eine Glasmurmel im Durchmesser von 2cm bis 3 cm.

(3) Das unter 1.8. genannte Polycarbonat ist zu beziehen bei der Firma Sahlberg in Feldkirchen bei München. Eine Polycarbonat – Platte dieser Dicke lässt sich gut mit einer Blechschere schneiden.
Der Quadratmeter– Preis liegt bei ca. 30 €. Das ergibt für ein Modell einen Preis von ca. 2 €.

Adresse der Firma Sahlberg:

Sahlberg GmbH
Postfach 1220
85619 Feldkirchen/ München

Tel: 089 – 99135– 0

(4) Die Verklebung der 6 gleichseitigen Dreiecke der Pyramide ist ganz einfach möglich mit transparentem Tesa oder aufwändiger mit Window– Color. Entsprechendes gilt für die 5 Quadrate zu Aufgabe 1.8.

(5) Das Projekt eignet sich hervorragend als Wiederholung zu den Themenbereichen "Ähnlichkeit von Dreiecken und Satz von Pythagaoras"

(6) Kontaktadresse E–Mail: manfred.kreuzpointner@ web.de